

Unidad III

Series de Fourier

3.1. Concepto, clasificación y caracterización de señales.

Una **serie de Fourier** es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). El nombre se debe al matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier que desarrolló la teoría cuando estudiaba la ecuación del calor. Fue el primero que estudió tales series sistemáticamente, y publicó sus resultados iniciales en 1807 y 1811. Esta área de investigación se llama algunas veces Análisis armónico.

Es una aplicación usada en muchas ramas de la ingeniería, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo. Refiérase al uso de un analizador de espectros.

3.2. Representación de señales usando serie trigonométrica de Fourier.

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones senoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

Es una aplicación usada en muchas ramas de la ingeniería, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo. Refiérase al uso de un analizador de espectros.

Las series de Fourier tienen la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

Donde a_n y b_n se denominan coeficientes de Fourier de la serie de Fourier de la función $f(x)$

Si $f(t)$ es una función (o señal) periódica y su período es T , la serie de Fourier asociada a $f(t)$ es:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

Donde a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de Fourier que toman los valores:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2n\pi}{T} t \right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \left(\frac{2n\pi}{T} t \right) dt.$$

Por la identidad de Euler, las fórmulas de arriba pueden expresarse también en su forma compleja:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T} t}.$$

Los coeficientes ahora serían:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} dt.$$

Por la [identidad de Euler](#) para la [exponencial](#) compleja, operando adecuadamente, si

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

la serie de Fourier se puede expresar como la suma de dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inx} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{inx}$$

En forma más compacta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

El análisis de señales en el dominio de la frecuencia se realiza a través de las series de Fourier, por cuanto es muy común, reemplazar la variable x por ωt , resultando las componentes:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

Por lo tanto:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\omega_k t}$$

Aplicaciones

Generación de formas de onda de corriente o tensión eléctrica por medio de la superposición de senoides generados por osciladores electrónicos de amplitud variable cuyas frecuencias ya están determinadas.

Análisis en el comportamiento armónico de una señal.

Reforzamiento de señales.

Estudio de la respuesta en el tiempo de una variable circuital eléctrica donde la señal de entrada no es senoidal o cosenoidal, mediante el uso de transformadas de Laplace y/o solución en régimen permanente senoidal en el dominio de la frecuencia.

La resolución de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales admiten soluciones particulares en forma de series de Fourier fácilmente computables, y que obtener soluciones prácticas, en la teoría de la [transmisión del calor](#), la [teoría de placas](#), etc.

3.3. Representación de señales usando serie compleja de Fourier.

Existe una gran similitud entre vectores y las señales. Propiedades tales como la ortogonalidad que permite descomponerlos a través de otros tipos de vectores, o en señales en su defecto, permitiendo así una representación con un nivel de error que dependerá de la manera como realicemos la representación; encontrando una gran variedad de conjuntos de funciones que permiten representar señales particulares facilitando el análisis de esta bajo el concepto de ortogonalidad del conjunto de funciones seleccionado

Las series de Fourier, tales como la serie exponencial de Fourier y la serie trigonométrica de Fourier, son casos particulares de conjuntos de funciones ortogonales que permiten la representación de la señal original a través de un conjunto de familia de funciones características en forma exponencial compleja (para representar cualquier tipo de funciones), o en un caso más particular, en forma trigonométrica (para representar funciones de carácter estrictamente reales). También se encuentran propiedades de la señal de análisis que reducen el procedimiento matemático necesario para las diferentes representaciones de Fourier.

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES. Para establecer una representación de una señal

en particular, se realizará inicialmente un análisis adecuado de un conjunto de vectores

de un espacio vectorial para una interpretación mucho más fácil de la idea de la representación de una señal.